

A SHORT PROOF OF THE TWELVE POINTS THEOREM

M. CENCELJ, D. REPOVŠ AND M. SKOPENKOV

ABSTRACT. We present a short elementary proof of the following Twelve Points Theorem: Let M be a convex polygon with vertices at the lattice points, containing a single lattice point in its interior. Denote by m (resp. m^*) the number of lattice points in the boundary of M (resp. in the boundary of the dual polygon). Then

$$m + m^* = 12.$$

The Twelve points theorem is an elegant theorem, which is easy to formulate, but no simple proof was available until now. In this paper we present a short and elementary proof of this result. To state our theorem we need the following

Definition of the dual polygon. Let $M = A_1A_2 \dots A_n$ be a convex polygon all of whose vertices lie in the lattice of points with integer coordinates (Figure 1 on the left). Suppose that O is the only lattice point in the interior of M . Draw the vectors $\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OA_2}, \dots, \overrightarrow{OA_n}$ from the point O . Choose on each of the obtained segments the nearest to O lattice point distinct from O . Connecting the n chosen points consecutively, we get a polygon M^* , *dual* to the original polygon (Figure 1 on the right). Denote by m the number of lattice points in the boundary of M , and by m^* — in the boundary of the dual polygon.

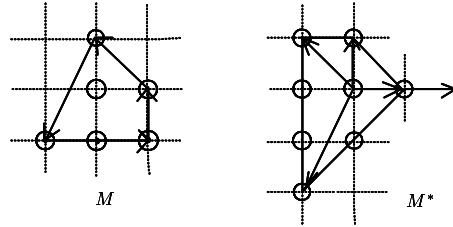


Figure 1.

1991 *Mathematics Subject Classification.* 52B20.

Key words and phrases. Lattice, lattice polygon, dual polygon, the Pick formula, toric varieties.

Repovš and Cencelj were supported in part by the Ministry for Education, Science and Sport of the Republic of Slovenia Research Program No. 101-509. Skopenkov was supported in part by Moscow grant and grant "Geometric topology" No. 02-01-00014 of Russian Foundation of Basic Research.

The Twelve Points Theorem. *Suppose that O is the only lattice point in the interior of a convex polygon M ; then*

$$m + m^* = 12.$$

This theorem appeared in [Ful93]. There are only some hints for the proof, applying the theory of toric varieties. In an interesting paper [PRV00], completely dedicated to the 12 points theorem, even four different proofs are discussed. Two of them are rather long and they use toric varieties and modular forms respectively. There are also outlined two proofs applying only linear algebra. The first of them is exhausting (there are 16 different types of polygons M in our theorem up to $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$). The idea of the second one is very close to the proof of recent paper.

Our elementary proof is analogous to one of the proofs of the Pick formula. We reduce the Twelve points theorem to the specific case when M is a parallelogram and $m = 4$. Let us begin with this latter case.

(1) *If $M = ABCD$ is a parallelogram without lattice points in its sides then $m + m^* = 12$ (Figure 2).*

Indeed, in this case $O = AC \cap BD$ because the point symmetric to the point O with respect to $AC \cap BD$ is a lattice point and belongs to the interior of $ABCD$, so it coincides with O . It is easy to show that M^* is a parallelogram with sides obtained from the diagonals AC and BD by parallel translations with vectors $\pm \overrightarrow{OB}$ and $\pm \overrightarrow{OA}$, respectively. Since a unique lattice point O belongs to these diagonals, then any side of the parallelogram M^* contains one lattice point, hence, $b + b^* = 4 + 8 = 12$.

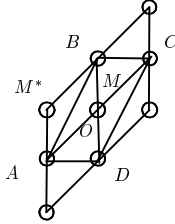


Figure 2.

Now suppose that $M = A_1 A_2 \dots A_n$. Let us assume that all the lattice boundary points of M are vertices (possibly, with the angle 180°). This does not affect the definition of M^* . Assume that some triangle $A_{i-1} A_i A_{i+1}$ is *simple*, i. e. it contains no lattice points except its vertices (neither in the interior nor in the boundary). *Deleting a triangle* is cutting off from polygon M the triangle $A_{i-1} A_i A_{i+1}$. The reverse operation is called *adding a triangle*. Our reduction is based on the following assertion:

(2) *The value $m + m^*$ is preserved under deleting or adding a triangle.*

It is sufficient to prove that deleting a simple triangle, say $A_1 A_2 A_3$, from M gives adding a simple triangle $A_{12} A_{13} A_{23}$ to M^* (Figure 3). Here by A_{kl} we denote the point such that $\overrightarrow{OA_{kl}} = \overrightarrow{A_k A_l}$. In particular, if $l = k + 1$ then A_{kl} is a vertex of the polygon M^* . Delete $A_1 A_2 A_3$. Then one should delete from M^* the vertices

A_{12} and A_{23} , and add to it a new vertex A_{13} . The last vertex should be joined by segments with A_{n1} and A_{34} .

Let us show that the points A_{12} and A_{23} belong to these segments. Indeed, since O is the only lattice point inside M , it follows that the triangles A_1OA_3 , A_2OA_3 , A_4OA_3 are simple. By the Pick formula their areas are equal to $1/2$. Since they have a common base OA_3 , it follows that the projections of the vectors $\overrightarrow{A_1A_3}$, $\overrightarrow{A_2A_3}$ and $\overrightarrow{A_4A_3}$ on the direction normal to OA_3 are equal.

This implies that the points A_{13} , A_{23} and A_{34} belong to the same line, and A_{23} lies between the two others, because M is convex. It can be proved analogously that A_{12} belongs to the segment $A_{n1}A_{13}$. Therefore the transformation of M^* is just adding the triangle $A_{12}A_{13}A_{23}$.

Now note that the triangle $OA_{12}A_{13}$ is obtained from a simple triangle $A_1A_2A_3$ by a parallel translation, and $OA_{23}A_{13}$ is obtained from it by a central symmetry. So the triangle $A_{12}A_{13}A_{23}$ is simple, and assertion (2) is proved.

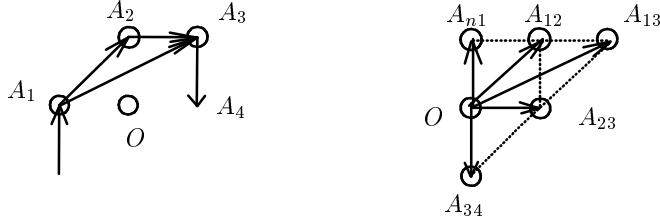


Figure 3.

For the proof of our theorem it remains to notice the following:

(3) *From any polygon M one can obtain a parallelogram without lattice points in the sides by a sequence of deleting and adding triangles.*

Indeed, first assume that M has a diagonal not passing through O . Cut M along this diagonal and consider the obtained part not containing O .

This part necessarily contains a simple triangle of the form $A_{i-1}A_iA_{i+1}$. Deleting it we decrease the number m . Repeat this operation until it is possible. Repetition is impossible only in the following 3 cases (when such a diagonal does not exist):

A) $m = 4$, $M = ABCD$, $O = AC \cap BD$. Since the segments OA , OB , OC and OD do not contain lattice points, then $OA = OC$ and $OB = OD$, that is $ABCD$ is the required parallelogram.

B) $m = 4$, $M = ABD$, and C belongs to the segment BD . In this case let us denote by D' the point symmetric to D with respect to O , and denote by E the middle point of $D'B$. The required sequence of deleting/adding of triangles has the form:

$ABCD \rightarrow AEBCD \rightarrow AD'EBCD \rightarrow AD'ECD \rightarrow AD'CD$ (Figure 4 on the left).

C) $m = 3$, $M = ABC$. In this case denote by A' and C' the points symmetric to A and C , respectively, with respect to O . The required sequence of deleting/adding of triangles has the form:

$ABC \rightarrow AC'BC \rightarrow AC'BA'C \rightarrow AC'A'C$ (Figure 4 on the right).

So in each case we obtain the required parallelogram, that completes the proof of our theorem.

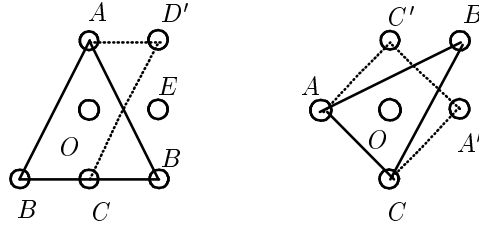


Figure 4.

Acknowledgement. The authors are grateful to V.V. Prasolov for the statement of the problem.

REFERENCES

- [Ful93] W. Fulton, *Introduction to toric varieties*, Princeton, New Jersey, 1993.
- [Kho97] A. G. Khovanskij, *The Newton polygons, curves on toric surfaces and a reversion of the Veil theorem*, Uspekhi Mat. Nauk **52:6(318)** (1997), 113–142.
- [PRV00] B. Poonen and F. Rodrigues-Villegas, *Lattice polygons and the number 12*, Am. Math. Mon. **107:3** (2000), 238–250.

INSTITUTE FOR MATHEMATICS, PHYSICS AND MECHANICS, UNIVERSITY OF LJUBLJANA, P. O. BOX 2964, 1001 LJUBLJANA, SLOVENIA. E-MAIL: MATIJA.CENCELJ@UNI-LJ.SI

INSTITUTE FOR MATHEMATICS, PHYSICS AND MECHANICS, UNIVERSITY OF LJUBLJANA, P. O. BOX 2964, 1001 LJUBLJANA, SLOVENIA. E-MAIL: DUSAN.REPOVS@UNI-LJ.SI

DEPARTMENT OF DIFFERENTIAL GEOMETRY, FACULTY OF MECHANICS AND MATHEMATICS, MOSCOW STATE UNIVERSITY, MOSCOW, RUSSIA 119992. E-MAIL: SKOPENKOV@RAMBLER.RU

ЭЛЕМЕНТАРНОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ О 12 ЦЕЛЫХ ТОЧКАХ

УДК 514

Д. Реповш, М. Скопенков и М. Ценцель

Теорема о 12 целых точках — красивое и простое по формулировке утверждение, у которого до последнего времени не было простого доказательства. Данная заметка посвящена ее элементарному доказательству. Для формулировки нам понадобится

Определение (Определение двойственного многоугольника). Пусть на плоскости фиксирована декартова система координат. Рассмотрим выпуклый многоугольник $M = A_1A_2 \dots A_n$ с вершинами в целых точках, содержащий внутри себя ровно одну целую точку O (Рис. 1). Отложим от точки O вектора сторон многоугольника $\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_2A_3}, \dots, \overrightarrow{A_nA_1}$ и на каждом из них отметим ближайшую к O целую точку (отличную от O). Соединяя последовательно отмеченные точки, получим многоугольник M^* , *двойственный* исходному. Обозначим количество целых точек на границах многоугольников M и M^* через t и t^* соответственно.

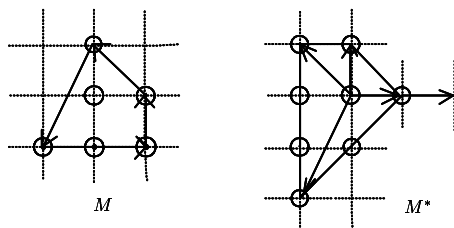


Рисунок 1.

Теорема 1 (о 12 целых точках). Пусть M — выпуклый многоугольник с вершинами в целых точках, содержащий внутри ровно одну целую точку. Тогда

$$t + t^* = 12.$$

Эта теорема была сформулирована в книге [1] с некоторыми указаниями к доказательству, использующему технику торических многообразий (см. также [2]). В интересной статье [3], целиком посвященной этой теореме, обсуждаются 4 различных доказательства. Три из них довольно объемны и основаны соответственно на сведениях к перебору 16 вариантов, теории модулярных форм и

2000 *Mathematics Subject Classification.* 52B20.

Реповш и Ценцель частично поддержаны Министерством Образования, Науки и Спорта Республики Словения, исследовательская программа No. 101-509. Скопенков частично поддержан грантом РФФИ No. 02-01-00014.

теории торических многообразий. Идея четвертого очень близка к идее данной заметки. (Для него в указанной статье приводится только план, прямая реализация которого также довольно громоздка.)

Приведенное ниже элементарное доказательство аналогично одному из доказательств формулы Пика. Мы сводим теорему о 12 целых точках к частному случаю, когда M — параллелограмм и $m = 4$. Начнем именно с этого случая:

(1) Если $M = ABCD$ — параллелограмм без целых точек на сторонах, то $m + m^* = 12$ (Рис. 2).

Действительно, в этом случае $O = AC \cap BD$. Это следует из того, что точка, симметричная точке O относительно $AC \cap BD$, — целая и лежит внутри $ABCD$, а поэтому совпадает с O . Легко видеть, что M^* — параллелограмм, стороны которого получаются из диагоналей AC и BD параллельными переносами на вектора $\pm \overrightarrow{OB}$ и $\pm \overrightarrow{OA}$ соответственно. Так как на этих диагоналях лежит единственная целая точка O , то на каждой стороне параллелограмма M^* лежит по одной целой точке, откуда $m + m^* = 4 + 8 = 12$.

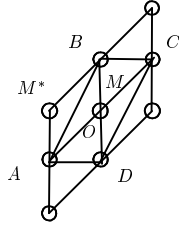


Рисунок 2.

Пусть теперь $M = A_1 \dots A_n$. Будем считать все целые точки на сторонах многоугольника M вершинами (возможно, с углом 180°). На определении M^* это не отразится. Предположим, что некоторый треугольник $A_{i-1}A_iA_{i+1}$ прост, то есть не содержит целых точек, отличных от вершин (ни внутри, ни на сторонах). Элементарной операцией $A_1 \dots A_{i-1}A_iA_{i+1} \dots A_n \rightarrow A_1 \dots A_{i-1}A_{i+1} \dots A_n$ назовем операцию удаления треугольника $A_{i-1}A_iA_{i+1}$ из M или обратную к ней. Наш метод сведения основан на следующем утверждении:

(2) При элементарной операции величина $m + m^*$ сохраняется.

Нам достаточно доказать, что, например, удаление простого треугольника $A_1A_2A_3$ из M приводит к добавлению простого треугольника $A_{12}A_{13}A_{23}$ к M^* (Рис. 3). Здесь через A_{kl} обозначена точка, такая что $\overrightarrow{OA_{kl}} = \overrightarrow{A_kA_l}$. В частности, если $l = k + 1$, то A_{kl} — вершина многоугольника M^* . Удалим $A_1A_2A_3$. Тогда у многоугольника M^* исчезнут вершины A_{12} и A_{23} , зато добавится новая вершина A_{13} . Ее еще нужно соединить отрезками с A_{n1} и A_{34} . Покажем, что точки A_{12} и A_{23} лежат на этих отрезках. В самом деле, так как O — единственная целая точка внутри M , то треугольники A_1OA_3 , A_2OA_3 , A_4OA_3 — простые. Из формулы Пика следует, что их площади равны $1/2$. Поскольку они имеют общее основание OA_3 , то проекции векторов $\overrightarrow{A_1A_3}$, $\overrightarrow{A_2A_3}$ и $\overrightarrow{A_4A_3}$ на перпендикуляр к OA_3 равны. Отсюда следует, что точки A_{13} , A_{23} и A_{34} лежат на одной прямой, а так как M — выпуклый, то A_{23} лежит между двумя остальными. Аналогично доказывается, что A_{12} принадлежит отрезку $A_{n1}A_{13}$. Значит,

преобразование M^* сводится к добавлению треугольника $A_{12}A_{13}A_{23}$. Заметим, что треугольник $OA_{12}A_{13}$ получается из простого треугольника $A_1A_2A_3$ параллельным переносом, а $OA_{23}A_{13}$ — центральной симметрией. Поэтому треугольник $A_{12}A_{13}A_{23}$ — простой, что и требовалось.

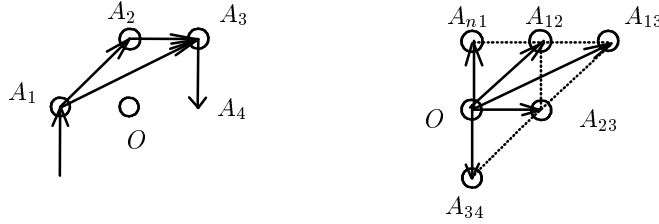


Рисунок 3.

Для доказательства теоремы остается заметить следующее:

(3) Из любого многоугольника M серией элементарных операций можно получить параллелограмм без целых точек на сторонах.

Действительно, предположим вначале, что у M есть диагональ, не проходящая через O . Разрежем M вдоль этой диагонали и рассмотрим ту из полученных частей, которая не содержит O . Эта часть обязательно содержит простой треугольник вида $A_{i-1}A_iA_{i+1}$. Поэтому элементарной операцией можно уменьшить число m . Будем действовать так, пока это возможно. Очевидно, есть только три случая, когда требуемой диагонали не найдется:

А) $m = 4$, $M = ABCD$, $O = AC \cap BD$. Так как отрезки OA , OB , OC и OD не содержат целых точек, то $OA = OC$ и $OB = OD$, то есть $ABCD$ — искомый параллелограмм.

В) $m = 4$, $M = ABCD$, один из углов, скажем, BCD — развернутый. В этом случае обозначим через D' точку, симметричную точке D относительно O , через E — середину $D'B$. Искомая серия элементарных операций имеет вид:

$$ABCD \rightarrow AEB CD \rightarrow AD' E B C D \rightarrow AD' E C D \rightarrow AD' C D \quad (\text{Рис. 4}).$$

С) $m = 3$, $M = ABC$. В этом случае обозначим через A' и C' точки, симметричные относительно O вершинам A и C соответственно. Тогда искомая серия имеет вид:

$$ABC \rightarrow AC' B C \rightarrow AC' B A' C \rightarrow AC' A' C \quad (\text{Рис. 4}).$$

Теорема доказана.

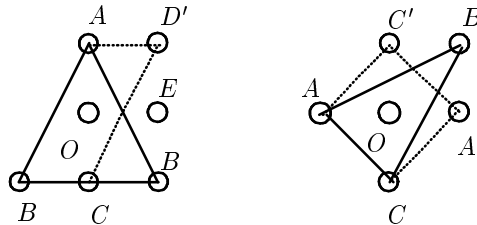


Рисунок 4.

Благодарности. Авторы благодарны В.В. Прасолову за постановку задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. Фултон, Введение в торические многообразия, Принстон, Нью-Джерси, 1993 (на английском).
- [2] А. Г. Хованский, Многоугольники Ньютона, кривые на торических поверхностях и обращение теоремы Вейля, Успехи Мат. Наук 52:6 (1997), стр. 113–142.
- [3] Б. Поонен и Ф. Родригес-Виллегас, Решеточные многоугольники и число 12, Amer. Math. Mon. 107:3 (2000), стр. 238–250 (на английском).

INSTITUTE FOR MATHEMATICS, PHYSICS AND MECHANICS, UNIVERSITY OF LJUBLJANA, P. O.
Box 2964, 1001 LJUBLJANA, SLOVENIA. E-MAIL: DUSAN.REPOVS@UNI-LJ.SI.

Москва 119992, Московский Государственный Университет, механико-математический
факультет, кафедра дифференциальной геометрии и приложений. E-MAIL: SKOPENKOV@RAMBLER.RU.

INSTITUTE FOR MATHEMATICS, PHYSICS AND MECHANICS, UNIVERSITY OF LJUBLJANA, P. O.
Box 2964, 1001 LJUBLJANA, SLOVENIA. E-MAIL: MATIJA.CENCELJ@UNI-LJ.SI.